Journal of Algebra **213,** 662–686 (1998)
Article ID jabr.1998.7641, available online at http://www.idealibrary.com on IDEAL®

Module Universel en Caractéristique $l > 0$ Associé à un Caractère de l'Algèbre de Hecke de GL(n) sur un Corps p-Adique, avec $l \neq p$

Départment de Mathématiques, Université Paris-Sud, Bâtiment 425, 91 405 Orsay Cedex, France
E-mail: Xavier.Lazarus@math.u-psud.fr

Communicated by Laurent Clozel

Received March 5, 1998

Soit G le groupe GL(n) sur un corps p-adique. On étudie dans cet article le module universel de Serre associé à un caractère de l'algèbre de Hecke de G relative à son sous-groupe compact maximal standard, le corps des coefficients étant algébriquement clos, de caractéristique $l > 0$ différente de p. On verra que l'on peut toujours lui associer une famille finie de séries principales sur G. On généralisera alors les résultats de Serre et de Kato, en prouvant que si l est une caractéristique banale pour G, un module universel, et une série principale associée sont des G-modules de longueur finie qui ont même suite de Jordan–Hölder.

INTRODUCTION

Soit F un corps local non archimédien, d'anneau des entiers $\mathscr{O}_F$, et de corps résiduel fini k_F, de cardinal q et de caractéristique p. Soient G le groupe linéaire GL(n, F) et K le sous-groupe compact ouvert maximal GL$(n, \mathscr{O}_F)$.

L'étude des extensions des représentations lisses et irréductibles de G à coefficients dans un corps algébriquement clos de caractéristique non nulle $l \neq p$, est particulièrement intéressante, comme le montre un argument arithmétique de Serre [18].

Suivant l'approche de Serre, on peut étudier ce phénomène, au moins dans le cas des représentations non ramifiées, en introduisant le module universel M_λ associé à un caractère λ de l'algèbre de Hecke $\mathscr{H}(G, K)$. Il vérifie la propriété universelle suivante:

0021-8693/99 $30.00

Soit V une représentation lisse de G. A tout vecteur non nul de V, K-invariant, sur lequel $\mathscr{H}(G, K)$ opère par λ, est associé un morphisme de G-modules non nul de M_λ dans V.

Ce type de modules a été introduit et étudié de façon générale sur $\mathbb{C}$ par Borel ([4]; Borel utilise la terminologie de "induced module" pour nommer M_λ). Kato [10, 11] sur $\mathbb{C}$ et pour un groupe réductif sur F général, puis Serre dans son cours au Collège de France en 1987 [17] pour GL(2) et en caractéristique $l \neq p$ arbitraire, ont déterminé la structure de G-module de M_λ. (Voir aussi dans [1] l'étude par Barthel et Livné de ce module universel pour GL(2) dans le cas où les caractéristiques l et p sont égales.) Nous allons généraliser et étendre ces résultats au cas du groupe linéaire G et d'un corps de coefficients de caractéristique $l > 0$ différente de p, telle que $q \not\equiv 1 \bmod l$. (Voir [21] et [24] pour l'étude des représentations modulaires de G.)

La donnée du caractère λ détermine une famille finie de séries principales $\mathscr{I}_\chi$. Soit B le sous-groupe d'Iwahori standard de K. Alors nous montrerons (Théorème 2.1) que l'espace des vecteurs B-invariants de M_λ a la même suite de Jordan−Hölder que l'espace des vecteurs B-invariants de $\mathscr{I}_\chi$, en tant que module sur l'algèbre de Hecke $\mathscr{H}(G, B)$. Nous calculerons aussi grâce à notre méthode, la dimension de l'espace des solutions des équations aux différences invariantes par le groupe de Weyl W de G et à coefficients dans un corps algébriquement clos de caractéristique non nulle (Théorème 3.2).

On déduira des résultats précédents et d'un résultat de Schneider et Stuhler [15], un critère d'isomorphisme entre les G-modules M_λ et $\mathscr{I}_\chi$ (Théorème 2.3). Ensuite, si l est une caractéristique banale pour G (cf. [21, II.3.9]), on démontrera (Théorème 2.2) que le module universel et les induites associées ont toujours même suite de Jordan−Hölder en tant que G-modules. Enfin, on complètera les résultats de Kato sur $\mathbb{C}$ en donnant une version plus précise de ce dernier théorème.

Je tiens à remercier Laurent Clozel pour ses conseils judicieux et sa relecture attentive de cet article.

1. MODULE UNIVERSEL DE SERRE

1.1. *Notations*

Dans ce qui suit, l désignera toujours un nombre premier différent de 2.

Soit F un corps local de valuation discrète v_F; on suppose que l'image de v_F est égale à $\mathbb{Z}$. Soient $\mathscr{O}_F$ l'anneau des entiers de F et ϖ_F une uniformisante de $\mathscr{O}_F$. On suppose que le corps résiduel $k_F = \mathscr{O}_F/(\varpi_F)$ est fini, de caractéristique $p > 0$, et de cardinal q. On note enfin $|x|_F = q^{-v_F(x)}$ la valeur absolue normalisée de $x \in F$.

Soient n un entier positif et G le groupe linéaire $\mathrm{GL}(n, F)$. Introduisons le sous-groupe parabolique minimal P formé des matrices triangulaires supérieures de G, le tore maximal T constitué des matrices diagonales de G et le radical unipotent N de P.

On note K le groupe $\mathrm{GL}(n, \mathcal{O}_F)$. C'est un sous-groupe compact ouvert de G. On considère aussi le sous-groupe d'Iwahori B formé par les matrices de K dont la réduction modulo ϖ_F est triangulaire supérieure.

Dans ce qui suit, un anneau sera toujours supposé commutatif et intègre. Soit R un anneau tel que $p \in R^\times$ et contenant une racine carrée de q, que l'on choisit et que l'on note $q^{1/2}$. On peut définir des mesures de Haar sur G ou ses sous-groupes, à valeurs dans k (cf. [21, I.2]); on note $\delta\colon P \to \mathbb{Q}^\times$ le module de P: δ est un morphisme de groupe, trivial sur N et en posant $\underline{n} = \mathrm{Lie}\, N$, on a pour tout $t \in T$,

$$\delta(t) = \left|\det \mathrm{Ad}_{\underline{n}}(t)\right|_F \in q^{\mathbb{Z}}.$$

Soit $T_0 = T \cap K$. On note $X_{\mathrm{nr}}(T, R) = \{\chi \in \mathrm{Hom}(T, R^\times) \mid \chi_{|T_0} = 1\}$ l'ensemble des caractères non ramifiés de T à valeurs dans R. Pour chaque $\chi \in X_{\mathrm{nr}}(T, R)$, il existe $z_1, \dots, z_n$ dans $R^\times$ tels que pour tout $t \in T$, de diagonale $(t_1, \dots, t_n)$, on ait $\chi(t) = z_1^{v_F(t_1)} \cdots z_n^{v_F(t_n)}$. L'application qui à χ associe la famille $(z_1, \dots, z_n)$ définit une bijection de $X_{\mathrm{nr}}(T, R)$ sur $(R^\times)^n$.

Comme q est inversible dans R, on peut considérer que δ est à valeurs dans $R^\times$ et alors $\delta(t)^{-1/2}$, grâce au choix de $q^{1/2}$, peut aussi être considéré à valeurs dans $q^{\mathbb{Z}/2} \subset R^\times$. Pour tout caractère $\chi \in X_{\mathrm{nr}}(T, R)$, on appelle R_χ la représentation de T de dimension 1 sur R, correspondant à χ. On peut alors induire cette représentation à G et on obtient la série principale associée à χ: c'est la représentation régulière à droite de G sur l'espace $\mathcal{I}_{\chi, R}$ des fonctions $f\colon G \to R$ telles que:

(a) $f(tng) = \delta(t)^{-1/2}\chi(t)f(g)$ pour tout $(t, n, g) \in T \times N \times G$;

(b) f est localement constante.

Si R est un corps de caractéristique l différente de p, algébriquement clos, dans lequel on a fixé une racine carrée de q, alors la série principale $\mathcal{I}_{\chi, R}$ est une représentation admissible de G [21, II.2.1], de longueur finie en tant que G-module [21, III.1.2].

La dimension de l'espace des vecteurs K-invariants de $\mathcal{I}_{\chi, R}$ est 1. On note alors 1_χ le vecteur sphérique de $\mathcal{I}_{\chi, R}$: c'est l'unique vecteur K-invariant de $\mathcal{I}_{\chi, R}$ qui vaut 1 sur l'identité de G. Nous omettrons dorénavant, à chaque fois que cela ne produira aucune confusion, l'indice R dans la notation $\mathcal{I}_{\chi, R}$.

Soient R un anneau et S un ensemble quelconque. On note $C(S, R)$ l'ensemble des fonctions de S à valeurs dans R et $R[S] \subset C(S, R)$ le sous-ensemble des fonctions à support fini. Pour $X \subset S$, nous noterons

$1_X \in C(S, R)$ la fonction caractéristique de X. Si G opère continûment sur S, que l'on aura muni de la topologie discrète, on obtient une représentation à gauche lisse de G sur $R[S]$ par $(g \cdot f)(s) = f(g^{-1} \cdot s)$. Le groupe G opère aussi sur $C(S, R)$ et on note $C^\infty(S, R)$ le sous-espace des vecteurs lisses de $C^\infty(S, R)$: il est formé par les éléments de $C(S, R)$ fixés par un sous-groupe ouvert de G. Le R-module $C^\infty(S, R)$ est alors canoniquement isomorphe au dual lisse de $R[S]$. Si de plus G opère transitivement sur S alors la représentation $R[S]$ est cyclique et engendrée par n'importe laquelle des fonctions $1_{\{s\}}$, pour $s \in S$.

On définit $\Lambda = T/T_0$; c'est un groupe libre de rang n. On note $W = N_G(T)/T$ le groupe de Weyl associé à G et T, où $N_G(T)$ est le normalisateur de T dans G. Il agit naturellement par automorphismes intérieurs sur T. On peut identifier W au groupe $\mathfrak{S}_n$ des permutations de n éléments, l'opération sur T étant alors donnée par celle des matrices de permutations: soit $w \in W$ considéré comme une permutation des indices $1, \ldots, n$ et soit $t \in T$ de diagonale $(t_1, \ldots, t_n)$, alors $w \cdot t$ est l'élément de T de diagonale $(t_{w(1)}, \ldots, t_{w(n)})$. De même, W opère sur $\Lambda \cong \mathbb{Z}^n$ et sur $X_{\mathrm{nr}}(T, k) \cong (k^\times)^n$ par permutation des coordonnées. Il opère alors sur $R[\Lambda]$ et on note $R[\Lambda]^W$ l'algèbre des éléments de $R[\Lambda]$ invariants par W.

Enfin, un nombre premier sera appelé une caractéristique banale pour un sous-groupe compact ouvert H de G si, pour tout sous-groupe compact ouvert U d'indice fini dans H, il est premier avec $[H : U]$ [21, II.3.9]. Par exemple, le nombre premier l est banal pour K si et seulement si l ne divise pas $q(q^n - 1)(q^{n-1} - 1) \cdots (q - 1)$; dans ce cas l est aussi une caractéristique banale pour G.

De même, le nombre premier l est banal pour B si et seulement si l ne divise pas $q(q - 1)$ ou de façon équivalente, si $l \neq p$ et $q \not\equiv 1 \bmod l$.

1.2. *Algèbres de Hecke*

L'algèbre de Hecke sur $\mathbb{Z}$ associée au couple (G, K) est l'algèbre des fonctions à support compact dans G et à valeurs dans $\mathbb{Z}$, bi-invariantes par l'action de K. On la note $\mathscr{H}_\mathbb{Z}(G, K)$; en tant que $\mathbb{Z}$-module, elle est naturellement isomorphe à $\mathbb{Z}[K \backslash G/K]$.

Le produit dans $\mathscr{H}_\mathbb{Z}(G, K)$ est défini de la façon suivante: si on considère les décompositions $KgK = \coprod_i Kg_i$ et $KhK = \coprod_j Kh_j$ alors

$$1_{KgK} \cdot 1_{KhK} = \sum_{i,j} 1_{Kg_ih_j}.$$

Ce produit définit une structure d'algèbre associative pour $\mathscr{H}_\mathbb{Z}(G, K)$. Pour la démonstration de ce fait, on peut se reporter à [14, Chap. 3, Sect. 1]. (La définition de Shimura du produit dans $\mathscr{H}_\mathbb{Z}(G, K)$ est différente de la nôtre mais la preuve de sa Proposition 3.4 assure l'équivalence des deux définitions.)

Soir R un anneau. On définit l'algèbre de Hecke sur R associée au couple (G, K) par

$$\mathscr{H}_R(G, K) = \mathscr{H}_{\mathbb{Z}}(G, K) \otimes_{\mathbb{Z}} R.$$

On a toujours un isomorphisme de R-modules

$$\mathscr{H}_R(G, K) \cong R[K \backslash G/K].$$

On appelle caractère de $\mathscr{H}_R(G, K)$ un morphisme de R-algèbres de $\mathscr{H}_R(G, K)$ dans R. On note $X(\mathscr{H}_R(G, K))$ l'ensemble des caractères de $\mathscr{H}_R(G, K)$.

Soit V un $R[G]$-module à droite. On note V^U le sous R-module formé par les vecteurs invariants par un sous-groupe compact ouvert U de G. Alors $\mathscr{H}_R(G, K)$ opère à droite sur V^K par $v \cdot 1_{KgK} = \sum_i v \cdot g_i$ pour $v \in V^K$ et $KgK = \coprod_i Kg_i$. On peut définir de même une opération à gauche si V est un $R[G]$-module à gauche.

Nous allons rappeler la définition et les propriétés de la transformation de Satake [14]. On note dg la mesure de Haar sur G à valeurs dans $\mathbb{C}$, normalisée par $\int_K dg = 1$ et dn celle sur N normalisée par $\int_{N \cap K} dn = 1$. On vérifie alors que si l'on considère deux éléments φ et ψ de $\mathscr{H}_R(G, K)$ comme des fonctions sur G, leur produit dans $\mathscr{H}_R(G, K)$ est le produit de convolution classique, défini pour tout $h \in G$ par

$$(\varphi * \psi)(h) = \int_G \varphi(g^{-1}h)\psi(g)\, dg.$$

On utilisera la même notation pour un élément de T et sa classe dans Λ à chaque fois que cela ne produira aucune confusion. On considère la transformation de Satake,

$$\begin{aligned} S: \mathscr{H}_{\mathbb{C}}(G, K) &\to \mathbb{C}[\Lambda], \\ f &\mapsto S(f), \end{aligned}$$

où $S(f)$ désigne la fonction définie pour tout $t \in \Lambda$ par

$$S(f)(t) = \delta^{-1/2}(t) \int_N f(tn)\, dn.$$

Le théorème suivant est dû à Satake [14, Théorème 3].

THÉORÈME 1.1. *La transformation de Satake S est un isomorphisme d'algèbres entre $\mathscr{H}_{\mathbb{C}}(G, K)$ et $\mathbb{C}[\Lambda]^W$.*

Il est bien connu que ce résultat reste valide si l'on remplace $\mathbb{C}$ par un anneau R, dans lequel p est inversible et où l'on a fixé une racine carrée de q (cf. [14, Théorème 3, Remarque 2]). Nous en rappelons la démonstration.

On pose $R_0 = \mathbb{Z}[1/p][\sqrt{q}\,] \subset \mathbb{C}$. Si R est anneau dans lequel p est inversible et qui contient une racine carrée de q, que l'on choisit et que l'on note $q^{1/2}$, alors l'application qui à $\sqrt{q}$ associe $q^{1/2}$ induit un morphisme naturel non nul d'anneaux de R_0 dans R, définissant sur R une structure de R_0-algèbre commutative, unitaire, et intègre. Enfin, on considère $\delta^{1/2}$ à valeurs dans R_0 par le choix de notre racine carrée de q dans $\mathbb{C}$. Dans ce qui suit, une R_0-algèbre sera toujours supposée commutative, unitaire, et intègre.

Soit Σ^+ l'ensemble des racines positives pour l'ordre associé à P. On notera additivement le produit dans le groupe libre Λ. On a un ordre partiel sur Λ défini par $t \leq t'$ si $t' - t \in \Sigma^+$. Soit $\Lambda^{++} \subset \Lambda$ l'ensemble des poids dominants. C'est un domaine fondamental pour l'action de W sur Λ. On a une décomposition $G = \coprod KtK$, où t décrit un ensemble $\mathcal{T}$ de représentants de Λ^{++} dans T. Une base de $\mathcal{H}_{R_0}(G, K)$ est alors constituée des fonctions $e_t = 1_{KtK}$ pour t décrivant $\mathcal{T}$.

Pour tout $t \in \Lambda$, on note W_t le stabilisateur de t dans W et on pose

$$\sigma_t = \frac{1}{\#W_t} \sum_{w \in W} w \cdot t \in R_0[\Lambda]^W.$$

L'ensemble des σ_t quand t décrit $\mathcal{T}$ forme une base de $R_0[\Lambda]^W$. En fait, cet ensemble forme une base de $R[\Lambda]^W$ pour toute R_0-algèbre R. Pour un ensemble fini S, on notera $|S|$ son cardinal et pour une partie compacte U de G, on notera $\mathrm{vol}(U)$ son volume par rapport à dg. Nous avons comme dans la démonstration de [10, Proposition 2.5]:

LEMME 1.2.

$$S(e_t) = \sum_{t' \in \mathcal{T}} \delta^{-1/2}(t')\mathrm{vol}(Kt^{-1}K \cap Kt'^{-1}N)\,\sigma_{t'}.$$

On pose $U_{t,t'} = Kt^{-1}K \cap Kt'^{-1}N$ et $c_{t,t'} = \delta^{-1/2}(t')\mathrm{vol}(U_{t,t'})$, le coefficient de la matrice définie par la transformation de Satake.

LEMME 1.3. *Pour tout t et t' dans $\mathcal{T}$, on a*:

(i) $c_{t,t} = \delta^{-1/2}(t) \in R_0$;

(ii) $\mathrm{vol}(U_{t,t'}) \in \mathbb{N}$ *et donc* $c_{t,t'} \in R_0$.

Preuve. (i) On a $c_{t,t} = \mathrm{vol}(U_{t,t})\delta^{-1/2}(t)$. Or $U_{t,t} = Kt^{-1}$ d'après [8, Proposition 4.4.4i]. Donc $c_{t,t} = \mathrm{vol}(Kt^{-1})\delta^{-1/2}(t) = \delta^{-1/2}(t)$.

(ii) On remarque que K opère à gauche sur $U_{t,t'} = Kt^{-1}K \cap Kt'^{-1}N$. On a donc une décomposition

$$U_{t,t'} = \coprod_{u \in K\backslash U_{t,t'}} Ku.$$

Ainsi $\mathrm{vol}(U_{t,t'}) = |K \setminus U_{t,t'}| \in \mathbb{N}$. ▮

Considérons la restriction de la transformation de Satake à $\mathscr{H}_{R_0}(G, K)$. C'est à nouveau un morphisme d'algèbres (cf. Théorème 1.1). Comme les familles $(e_t)_{t \in \mathscr{T}}$ et $(\sigma_t)_{t \in \mathscr{T}}$ sont des bases des R_0-modules $\mathscr{H}_{R_0}(G, K)$ et $R_0[\Lambda]^W$ respectivement, le Lemme 1.3 nous dit que S est un morphisme d'algèbres de $\mathscr{H}_{R_0}(G, K)$ dans $R_0[\Lambda]^W$. De plus, d'après les Lemmes 5.1 et 5.2 de [14], la matrice de S par rapport aux bases précédemment mentionnées, est décomposable en une somme directe dénombrable de matrices triangulaires inférieures—pour l'ordre partiel sur Λ—de dimension finie. Ses termes diagonaux valent $c_{t,t} = \delta^{-1/2}(t)$ et sont donc inversibles dans R_0. La famille $(S(e_t))_{t \in \mathscr{T}}$ est alors une base du R_0-module $R_0[\Lambda]^W$. On a ainsi démontré:

PROPOSITION 1.4. *La transformation de Satake S est un isomorphisme d'algèbres entre $\mathscr{H}_{R_0}(G, K)$ et $R_0[\Lambda]^W$.*

Soit R une R_0-algèbre. Le Lemme 1.3 et le morphisme $R_0 \to R$ permettent de considérer que les coefficients $c_{t,t'}$ sont dans R. Comme les familles $(e_t)_{t \in \mathscr{T}}$ et $(\sigma_t)_{t \in \mathscr{T}}$ sont des bases des R-modules $\mathscr{H}_R(G, K)$ et $R[\Lambda]^W$ respectivement, on peut définir la transformation de Satake S: $\mathscr{H}_R(G, K) \to R[\Lambda]^W$ par sa matrice par rapport aux bases précédemment mentionnées. Cette matrice est toujours décomposable en une somme directe dénombrable de matrices triangulaires inférieures de dimension finie et de termes diagonaux inversibles, ainsi S est un isomorphisme de R-modules.

Il reste à voir que S est à nouveau un morphisme d'algèbres. Pour cela, nous allons rappeler la fonctorialité de la transformation de Satake. Elle provient du diagramme commutatif suivant, qui est évident pour toute R_0-algèbre R grâce à la définition matricielle de S:

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{H}_{R_0}(G, K) & \to & R_0[\Lambda]^W \\ \downarrow {\scriptstyle \otimes_{R_0} R} & & \downarrow {\scriptstyle \otimes_{R_0} R} \\ \mathscr{H}_R(G, K) & \to & R \otimes_{R_0} R_0[\Lambda]^W \cong R[\Lambda]^W. \end{array}$$

PROPOSITION 1.5. *Soient R et R' deux R_0-algèbres, et $R' \to R$ un morphisme de R_0-algèbres. Alors il existe un diagramme commutatif de mor-*

phimes de R'-modules,

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{H}_{R'}(G,K) & \to & R'[\Lambda]^W \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathscr{H}_R(G,K) & \to & R[\Lambda]^W, \end{array}$$

où les flèches horizontales sont donnés par la transformation de Satake et les flèches verticales sont données par le morphisme $R' \to R$.

Si on prend $R' = R_0$ dans la proposition précédente, alors comme la transformation de Satake sur R_0 est un morphisme d'algèbres et comme $\mathscr{H}_R(G,K) = \mathscr{H}_{R_0}(g,K) \otimes_{R_0} R$, la transformation de Satake sur R est aussi un morphisme d'algèbres. On a donc prouvé:

PROPOSITION 1.6. *Soit R une R_0-algèbre. Alors, la transformation de Satake définit un isomorphisme d'algèbres de $\mathscr{H}_R(G,K)$ vers $R[\Lambda]^W$.*

En appliquant la théorie des invariants d'une algèbre par un groupe fini d'automorphismes [6, Chap. 5, Sect. 1.9] on obtient:

COROLLAIRE 1.7. *Soit R une R_0-algèbre. L'algèbre de Hecke $\mathscr{H}_R(G,K)$ est une algèbre commutative de type fini sur R.*

Soit R une R_0-algèbre. A tout $\chi \in X_{\mathrm{nr}}(M,R)$ on peut associer un caractère $\lambda_\chi \in X(\mathscr{H}_R(G,K))$ défini par

$$\lambda_\chi : \mathscr{H}_R(G,K) \to R$$
$$f \mapsto \langle \chi, S(f) \rangle = \sum_{t \in \Lambda} \chi(t) S(f)(t).$$

On a, comme en [13, Théorème 3.3.12]:

PROPOSITION 1.8. *L'application qui à χ associe λ_χ réalise une bijection de $X_{\mathrm{nr}}(T,R)/W$ sur $X(\mathscr{H}_R(G,K))$.*

On déduit facilement de la Proposition 1.5, la fonctorialité de cette bijection:

PROPOSITION 1.9. *Soient R et R' deux R_0-algèbres et $R' \to R$ un morphisme de R_0-algèbres. Il existe un diagramme commutatif de fonctions,*

$$\begin{array}{ccc} X_{\mathrm{nr}}(T,R') & \to & X(\mathscr{H}_{R'}(G,K)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_{\mathrm{nr}}(T,R) & \to & X(\mathscr{H}_R(G,K)), \end{array}$$

où les flèches verticales correspondent au morphisme $R' \to R$ et les flèches horizontales correspondent à l'application $\chi \mapsto \lambda_\chi$ (Proposition 1.8).

Kato [10] a étendu la transformation de Satake de l'algèbre de Hecke $\mathbb{C}[K\setminus G/K]$ à l'espace vectoriel $\mathbb{C}[B\setminus G/K]$,

$$\begin{aligned}\mathscr{S}\colon \mathbb{C}[B\setminus G/K] &\to \mathbb{C}[\Lambda],\\ f &\mapsto S(f),\end{aligned}$$

où $S(f)$ est défini par la même formule que précédemment. On a une structure naturelle de $\mathscr{H}_{\mathbb{C}}(G,K)$-module à droite sur $\mathbb{C}[B\setminus G/K] = \mathbb{C}[B\setminus G]^K$ et sur $\mathbb{C}[\Lambda]$, en posant $f\cdot\varphi = fS(\varphi)$ pour $f\in\mathbb{C}[\Lambda]$ et $\varphi\in\mathscr{H}_{\mathbb{C}}(G,K)$. On vérifie alors que la transformation de Satake étendue $\mathscr{S}$ est un morphisme de $\mathscr{H}_{\mathbb{C}}(G,K)$-modules à droite [10, Lemme 2.4(ii)].

PROPOSITION 1.10 [10, Proposition 2.5]. *$\mathscr{S}$ est un isomorphisme de $\mathscr{H}_{\mathbb{C}}(G,K)$-modules à droite entre $\mathbb{C}[B\setminus G/K]$ et $\mathbb{C}[\Lambda]$.*

Nous allons à nouveau vérifier que ce résultat s'étend à une R_0-algèbre. On rappelle que $G = \coprod_{t\in\Lambda} BtK$ et donc que si on note f_t la fonction caractéristique de BtK, la famille des f_t pour $t\in\Lambda$ forme une base de $R_0[B\setminus G/K]$. Kato a calculé [10, Preuve de la Proposition 2.5] que

$$\mathscr{S}(f_t) = \sum_{t'\in\Lambda} \delta^{-1/2}(t')\mathrm{vol}(Kt^{-1}B\cap Kt'^{-1}N)t.$$

On pose $U'_{t,t'} = Kt^{-1}B\cap Kt'^{-1}N$ et $c'_{t,t'} = \mathrm{vol}(U'_{t,t'})\delta^{-1/2}(t')$.

LEMME 1.11. *Pour tout t et t' dans Λ, on a:*

(i) $c'_{t,t} = \delta^{-1/2}(t)$;

(ii) $\mathrm{vol}(U'_{t,t'})\in\mathbb{N}$ *et donc* $c'_{t,t'}\in R_0$.

Preuve. (ii) On a comme pour le Lemme 1.3(ii)

$$\mathrm{vol}(U'_{t,t'}) = |K\setminus U'_{t,t'}|\in\mathbb{N}.$$

(i) Posons $C'_{t,t} = \mathrm{vol}(U'_{t,t}) = |K\setminus U'_{t,t}|$. Comme $Kt^{-1}\subset U'_{t,t}$ alors $C'_{t,t}\geq 1$. De plus, on remarque que $U'_{t,t}\subset U_{t_d,t}$ où t_d est l'unique élément de Λ^{++} conjugué à t. En effet, comme on peut choisir des représentants de W dans K, on a $KtK = Kt_dK$. Alors, comme $Kt^{-1}B\subset Kt^{-1}K$, on a $U'_{t,t}\subset U_{t_d,t}$. Comme le volume de $U_{t_d,t}$ apparaît comme coefficient dans la transformée de Satake $S(e_t)$ (Lemme 1.2), il est invariant par l'action de W sur t et on a donc $\mathrm{vol}(U_{t_d,t}) = \mathrm{vol}(U_{t_d,t_d})$. Ainsi, $C'_{t,t}\leq\mathrm{vol}(U_{t_d,t_d}) = 1$ d'après le Lemme 1.3(i). Finalement $c'_{t,t} = C'_{t,t}\delta^{-1/2}(t) = \delta^{-1/2}(t)$. ∎

Comme la matrice formée par les $c'_{t,t'}$ est décomposable en une somme directe dénombrable de matrices triangulaires inférieures de dimension finie [10, Lemme 2.6 et Preuve de la Proposition 2.5] et de coefficients diagonaux inversibles dans R_0, on peut appliquer la même méthode que pour les Propositions 1.4 et 1.6 pour démontrer:

PROPOSITION 1.12. *Si R est une R_0-algèbre, alors la transformation de Satake $\mathcal{S}$ est un isomorphisme entre les $\mathcal{H}_R(G, K)$-modules à droite $R[B \backslash G/K]$ et $R[\Lambda]$.*

Remarque. On peut considèrer $R[\Lambda]$ comme étant l'algèbre des séries de Laurent $R[X_1, X_1^{-1}, \dots, X_n, X_n^{-1}]$, en identifiant l'élément de T de diagonale $(1, \dots, 1, \varpi_F, 1, \dots, 1)$ (ϖ_F est en $i$ème position) avec l'indéterminée X_i. Alors, d'après la théorie des polynômes symétriques, on a

$$R[\Lambda]^W = R\left[\Sigma_1, \dots, \Sigma_i, \dots, \Sigma_n, \Sigma_n^{-1}\right]$$

avec

$$\Sigma_i = \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_i \leq n} X_{j_1} \cdots X_{j_i}.$$

Soit R un anneau. On peut définir de façon identique, l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_R(G, B)$ associée au couple (G, B) et une action de cette algèbre sur V^B pour tout $R[G]$-module V. On note f le foncteur de la catégorie des représentations lisses de G à coefficients dans R vers celle des $\mathcal{H}_R(G, B)$-modules, qui à V associe V^B. Nous allons rappeler quelques propriétés bien connues de ce foncteur.

LEMME 1.13. *Si $q(q-1) \in R^\times$ alors le foncteur f est exact.*

Preuve. On considère une suite exacte de $R[G]$-modules lisses:

$$0 \to N \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} P \to 0.$$

On a toujours une suite exacte de $\mathcal{H}_R(G, B)$-modules:

$$0 \to N^B \xrightarrow{\alpha} M^B \xrightarrow{\beta} P^B.$$

Montrons que β est surjectif. Soit $z \in P^B$. Il existe $x \in M$ tel que $z = \beta(x)$. Soit $U = \{g \in B \mid g \cdot x = x\}$. C'est un sous-groupe ouvert de B. On pose

$$y = \sum_{g \in B/U} g \cdot x \in M^B.$$

On a

$$\beta(y) = \sum_{g \in B/U} g \cdot \beta(x) = \sum_{g \in B/U} g \cdot z = [B:U]z.$$

Comme $[B:U]$ divise $(q(q-1))^d$ pour un $d \in \mathbb{N}$, alors $[B:U]$ est inversible dans R et $z \in \beta(M^B)$, ce qui prouve l'exactitude du foncteur des B-invariants. ∎

COROLLAIRE 1.14. *Soit R un anneau tel que $q(q-1) \in R^\times$ et V un $R[G]$-module cyclique engendré par un vecteur B-invariant v. Le $\mathscr{H}_R(G,B)$-module V^B est aussi cyclique engendré par v.*

Preuve. On a par hypothèse un G-morphisme surjectif $R[G/B] \to V$ qui a 1_{gB} associe $g \cdot v$. Le Lemme 1.13 nous dit que ce morphisme induit un $\mathscr{H}_R(G,B)$-morphisme surjectif de $\mathscr{H}_R(G,B) = R[B \setminus G/B]$ sur V^B, qui à $f \in \mathscr{H}_R(G,B)$ associe $f \cdot v$, ce qui prouve notre résultat. ∎

On a le résultat fondamental suivant:

THÉORÈME 1.15 [21, II.3.12]. *Soit $R = k$ un corps algébriquement clos. Si la caractéristique de k est banale pour G, le foncteur f est une équivalence de catégories entre la catégorie des représentations admissibles V de G à coefficients dans k, qui sont engendrées par V^B, et celle des $\mathscr{H}_k(G,B)$-modules de dimension finie sur k.*

1.3. MODULE UNIVERSEL DE SERRE

Soit R un anneau. On note $M_R = R[G/K]$ le module des fonctions sur G, à support fini, à valeurs dans R et K-invariantes à droite. C'est un $R[G]$-module à gauche lisse et cyclique, engendré par la fonction caractéristique de K, notée 1_K. Comme $M_R = R[G]^K$, l'algèbre de Hecke $\mathscr{H}_R(G,K)$ opère à droite sur M_R et cette action commute avec celle de G à gauche.

PROPOSITION 1.16. *L'algèbre de Hecke $\mathscr{H}_R(G,K)$ est le commutant de la représentation à gauche de G sur M_R.*

Preuve. Soit Φ dans le commutant $\mathrm{End}_G(M_R)$ de l'opération de G à gauche sur M_R. Alors Φ opère sur $M_R^K = \mathscr{H}_R(G,K)$. Comme M_R est engendré par M_R^K en tant que G-module, la restriction de Φ à M_R^K le détermine entièrement. L'application $\Phi \mapsto \Phi(1_K)$ est donc un morphisme injectif d'algèbres entre $\mathrm{End}_G(M_R)$ et $\mathscr{H}_R(G,K)$. Enfin, ce morphisme étant par définition surjectif, c'est l'isomorphisme cherché. ∎

Soit maintenant $\lambda \in X(\mathscr{H}_R(G,K))$. On note R_λ le R-module de rang 1, où $\mathscr{H}_R(G,K)$ opère par le caractère λ.

DÉFINITION 1.17 (Serre). On appelle module universel de G associé au caractère λ, le $R[G]$-module

$$M_{\lambda,R} = M_R \otimes_{\mathscr{H}_R(G,K)} R_\lambda.$$

Dorénavant, si cela ne prête à aucune confusion, nous omettrons l'indice R dans les notations $\mathscr{H}_R(G,K)$ et $M_{\lambda,R}$. On notera $\overline{1}_K$ l'image de 1_K dans M_λ. Alors, de façon évidente, M_λ est une représentation lisse et cyclique de G, engendrée par $\overline{1}_K$.

Pour $\varphi = \sum_i \alpha_i 1_{Kg_iK} \in \mathscr{H}(G,K)$, on note $\tilde{\varphi} = \sum_i \alpha_i 1_{Kg_i^{-1}K} \in \mathscr{H}(G,K)$ l'opérateur contragrédient qui lui est associé. On note aussi $\mathscr{N}_\lambda$ le noyau de λ, et $N_\lambda = M_R \cdot \mathscr{N}_\lambda$. On note enfin $M'_R = C^\infty(G/K, R)$ le dual lisse de M_R et M'_λ celui de M_λ.

PROPOSITION 1.18. (i) *On a un isomorphisme de G-modules*:

$$M_\lambda \cong M_R/N_\lambda.$$

(ii) *On a un isomorphisme de G-modules*:

$$M'_\lambda \cong \{ f \in M'_R \mid f \cdot \varphi = \lambda(\tilde{\varphi}) f \quad \forall \varphi \in \mathscr{H}(G,K) \}.$$

Preuve. (i) On considère la suite exacte de $\mathscr{H}(G,K)$-modules:

$$0 \to \mathscr{N}_\lambda \to \mathscr{H}(G,K) \xrightarrow{\lambda} R_\lambda \to 0.$$

On obtient l'isomorphisme cherché en tensorisant avec M_R sur $\mathscr{H}(G,K)$.

(ii) est un calcul de dualité immédiat; cf. [4, Proposition 2.6]. ∎

Pour toute représentation lisse V de G, on note $V^K(\lambda)$ le sous-module formé par les vecteurs $v \in V^K$ tels que $\varphi \cdot v = \lambda(\varphi) v$, pour tout $\varphi \in \mathscr{H}(G,K)$. On considère le R-morphisme i: $\mathrm{Hom}_G(M_\lambda, V) \to V^K$ défini par $i(\phi) = \phi(\overline{1}_K) \in V^K$, pour tout $\phi \in \mathrm{Hom}_G(M_\lambda, V)$. On vérifie que pour tout $\varphi \in \mathscr{H}(G,K)$ et pour tout $\phi \in \mathrm{Hom}_G(M_\lambda, V)$, on a $\phi(\overline{1}_K) \cdot \varphi = \lambda(\varphi)\phi(\overline{1}_K)$, et donc que l'image de i est dans $V^K(\lambda)$.

PROPOSITION 1.19 (Propriété universelle de M_λ). *Pour toute représentation V de G à coefficients dans R, i est un isomorphisme de R-modules, fonctoriel en V, de* $\mathrm{Hom}_G(M_\lambda, V)$ *sur* $V^K(\lambda)$.

Preuve. Puisque $\overline{1}_K$ est cyclique dans M_λ, l'injectivité de i est évidente. De plus, pour chaque $v \in V^K(\lambda)$, l'application qui à $g \in G$ associe $g \cdot v$, induit un G-morphisme de M_R vers V dont le noyau contient N_λ. Il se factorise donc en un G-morphisme de M_λ vers V, ce qui prouve la surjectivité de i. ∎

PROPOSITION 1.20. *Soit R une R_0-algèbre. On considère un caractère non ramifié $\chi \in X_{\mathrm{nr}}(T,R)$ et $\lambda_\chi \in X(\mathscr{H}(G,K))$ le caractère de l'algèbre de Hecke qui lui est associé par le Corollaire* 1.8. *Pour tout $f \in \mathscr{I}_\chi^K$ et pour tout $\varphi \in \mathscr{H}_k(G,K)$, on a*

$$f \cdot \varphi = \lambda_\chi(\varphi) f.$$

Ainsi, il existe un unique morphisme ϕ_χ: $M_{\lambda_\chi} \to \mathscr{I}_\chi$ tel que $\phi_\chi(\overline{1}_K) = 1_\chi$.

Preuve. La deuxième assertion se déduit aisément de la première grâce à la propriété universelle 1.19.

La première assertion est bien connue si la caractéristique de R est nulle et si R est un corps algébriquement clos (cf. [14, Sect. 5.3 et 5.4] par exemple).

On remarque que si cette assertion est vraie pour une R_0-algèbre R, elle l'est pour toutes ses sous-algèbres. Ainsi, en considérant une clôture algèbrique du corps de fractions de R, on déduit que l'assertion est vraie pour toute R_0-algèbre de caractéristique nulle.

Supposons maintenant R de caractéristique non nulle. D'après la remarque précédente, il suffit de traiter le cas où $R = k$ est un corps. Soit A l'anneau des vecteurs de Witt de k (cf. [16, Chap. II, Sect. 5]). Nous allons relever la situation en caractéritique nulle. Comme $l \neq 2$, il existe une racine carrée de q dans A, que l'on choisit. Alors A a une structure de R_0-algèbre et donc d'après la Proposition 1.9, on a un diagramme commutatif d'applications:

$$\begin{array}{ccc} X_{\mathrm{nr}}(T, A) & \to & X(\mathscr{H}_A(G, K)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_{\mathrm{nr}}(T, k) & \to & X(\mathscr{H}_k(G, K)). \end{array}$$

On remarque que les flèches verticales, correspondant à la réduction $A \to k$, sont surjectives. Alors, on peut relever $\chi \in X_{\mathrm{nr}}(T, k)$ en $\tilde{\chi} \in X_{\mathrm{nr}}(T, A)$ et $\lambda_{\tilde{\chi}} \in X(\mathscr{H}_A(G, K))$ est un relèvement de $\lambda_\chi \in X(\mathscr{H}_k(G, K))$.

Soient $f \in \mathscr{I}_{\chi, k}^K$ et $\varphi \in \mathscr{H}_k(G, K)$. On pose $x = f \cdot \varphi - \lambda_\chi(\varphi) f$. Soient $\tilde{f} \in \mathscr{I}_{\tilde{\chi}, A}^K$ et $\tilde{\varphi} \in \mathscr{H}_A(G, K)$ des relèvements de f et φ. Alors $\tilde{x} = \tilde{f} \cdot \tilde{\varphi} - \lambda_{\tilde{\chi}}(\tilde{\varphi}) \tilde{f}$ est un relèvement de x. Or $\tilde{x} = 0$ car la proposition est vraie en caractéristique nulle, donc $x = 0$. ∎

2. LES RÉSULTATS

Dans ce qui suit, on désignera par $R = k$ un corps algébriquement clos, de caractéristique $l > 0$ différente de p. On choisit une racine carrée de q dans k.

A chaque $\lambda \in X(\mathscr{H}(G, K))$, on peut associer un caractère non ramifié χ tel que $\lambda = \lambda_\chi$ et on peut donc associer au module universel M_λ une induite $\mathscr{I}_\chi$, grâce au Corollaire 1.8. L'ensemble des caractères χ qui vérifient cette propriété constitue une orbite de $X_{\mathrm{nr}}(T, k)$ sous l'action de W. Nous dirons que les caractères λ_χ et χ ainsi que les modules universels et induites correspondants sont *associés* s'ils se trouvent dans la situation précédemment décrite.

Soient $\lambda \in X(\mathscr{H}(G, K))$ et $\chi \in X_{\mathrm{nr}}(T, k)$ associés. Les structures de G-modules de M_λ et de $\mathscr{I}_\chi$ sont reliées par les théorèmes suivants.

THÉORÈME 2.1. *Si l est une caractéristique banale pour B alors M_λ^B est de dimension finie sur k, égale à $|W|$; les $\mathscr{H}(G, B)$-modules M_λ^B et $\mathscr{I}_\chi^B$ sont de longueur finie et ont même suite de Jordan–Hölder.*

On en déduit immédiatement en appliquant l'équivalence inverse de catégories définie par le Théorème 1.15:

COROLLAIRE 2.2. *Soient $\lambda \in X(\mathscr{H}(G, K))$ et $\chi \in X_{\mathrm{nr}}(T, k)$ associés. Si on suppose que l est une caractéristique banale pour G, alors les G-modules M_λ et $\mathscr{I}_\chi$ sont admissibles, de longueur finie et ont même suite de Jordan–Hölder.*

THÉORÈME 2.3. *Soient $\lambda \in X(\mathscr{H}(G, K))$ et $\chi \in X_{\mathrm{nr}}(T, k)$ associés. Supposons que l est une caractéristique banale pour B. L'application $\phi_\chi: M_\lambda \to \mathscr{I}_\chi$ définie dans la Proposition* 1.20 *est un isomorphisme de G-modules si, et seulement si le vecteur sphérique 1_χ est cyclique dans $\mathscr{I}_\chi$.*

Remarque. Nous conjecturons que le Corollaire 2.2 est vrai pour tout $l \neq p$. Pour GL(2), cela a été démontré par Serre (cf. [17]).

3. PREUVE DU THÉORÈME 2.1

Afin de démontrer le Théorème 2.1, on commencera par rappeler une propriété géométrique bien connue, à savoir la platitude de $k[\Lambda]$ sur $k[\Lambda]^W$. On reliera ensuite cette propriété au fait que les espaces vectoriels M_λ^B doivent tous avoir la même dimension. On en déduira le Théorème 2.1 grâce au principe de Brauer, dû à Vignéras [21, I.9].

3.1. *Platitude de $k[\Lambda]$ sur $k[\Lambda]^W$: Application aux Équations aux Différences en Caractéristique Finie*

Soit $A = k[\Lambda]$ et $B = k[\Lambda]^W$. On rappelle que l'on a des identifications

$$A = k\left[X_1, X_1^{-1}, \ldots, X_n, X_n^{-1}\right]$$

et

$$k[\Lambda]^W = k\left[\Sigma_1, \ldots, \Sigma_i, \ldots, \Sigma_n, \Sigma_n^{-1}\right]$$

avec

$$\Sigma_i = \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_i \leq n} X_{j_1} \cdots X_{j_i}.$$

On rappelle aussi que les polynômes symétriques Σ_i sont algébriquement indépendants sur k.

PROPOSITION 3.1. *Soit I l'idéal maximal de A engendré par la famille $(X_1 - \chi_1, X_1^{-1} - \chi_1^{-1}, \dots, X_n - \chi_n, X_n^{-1} - \chi_n^{-1})$ avec $\chi_i \in k^\times$ pour tout $i = 1, \dots, n$ et soit J l'idéal de B engendré par la famille $(\Sigma_1 - \lambda_1, \dots, \Sigma_n - \lambda_n, \Sigma_n^{-1} - \lambda_n^{-1})$ avec $\lambda_i = \Sigma_i(\chi_1, \dots, \chi_n)$.*

(i) *Le localisé A_I de A par rapport à I est un module libre de rang $|W| = n!$ sur le localisé B_J de B par rapport à J i.e., A est un B-module plat;*

(ii) *La dimension sur k de $A \otimes_B B/J$ ne dépend pas du choix de $\chi_1, \dots, \chi_n$ et est égale à $|W| = n!$*

Preuve. (i) On considére les sous-anneaux $\mathscr{A} = k[X_1, \dots, X_n]$ et $\mathscr{B} = \mathscr{A}^W = k[\Sigma_1, \dots, \Sigma_n]$ de A et B respectivement. Soient $\mathscr{I}$ (resp. $\mathscr{J}$) l'idéal maximal de $\mathscr{A}$ (resp. $\mathscr{B}$) engendré par la famille $(X_1 - \chi_1, \dots, X_n - \chi_n)$ (resp. $(\Sigma_1 - \lambda_1, \dots, \Sigma_n - \lambda_n)$). Alors on remarque que $A_I = \mathscr{A}_{\mathscr{I}}$ et $B_J = \mathscr{B}_{\mathscr{J}}$. Or $\mathscr{B} = \mathscr{A}^W$ est une k-algèbre graduée de polynômes et $\mathscr{A}$ est un $\mathscr{B}$-module de type fini [6, Chap. 5, Sect. 1.9]. En appliquant le Lemme 5 de [7, Chap. 5, Sect. 5.5], $\mathscr{A}$ est un $\mathscr{B}$-module libre, de rang nécessairement égale à $|W|$ [7, Chap. 5, Sect. 5.2]. Ainsi, $\mathscr{A}_{\mathscr{I}}$ est un $\mathscr{B}_{\mathscr{J}}$-module libre de rang $n!$.

(ii) On remarque que

$$A \otimes_B B/J \cong A \otimes_{B,J} k,$$

B opérant sur k par $\Sigma_i \mapsto \lambda_i$, pour tout $i = 1, \dots, n$. Comme $A \otimes_{B,J} k \cong A_I \otimes_{B_J, J} k$, on obtient le résultat grâce à (i). ∎

Nous allons donner comme première application de cette propriété, le calcul de la dimension de l'espace des solutions des équations aux différences invariantes par W, en caractéristique finie.

Rappelons la définition d'un opérateur de différence associé au réseau Λ [20, Sect. 8]. Pour $v \in \Lambda$, l'opérateur de différence T_v est défini sur $C^\infty(\Lambda, k)$ par $(T_v f)(x) = f(x + v)$ pour $x \in \Lambda$ et $f \in C^\infty(\Lambda, k)$. Si on étend cette définition par linéarité, on définit les opérateurs de différences T_ϕ pour $\phi \in k[\Lambda]$.

Pour tout $\varphi \in k[\Lambda]^W$, on appelle Δ_φ l'opérateur de différence défini pour tout $f \in C^\infty(\Lambda, k)$ et tout $x \in \Lambda$ par

$$\Delta_\varphi(f)(x) = \sum_s a_s f(x t_s) \quad \text{si } \varphi = \sum_s a_s t_s.$$

Soit $\chi \in X_{\mathrm{nr}}(T, k)$. On note H_χ l'espace constitué des fonctions $f \in C^\infty(\Lambda, k)$ vérifiant $\Delta_\varphi(f) = \langle \chi^{-1}, \varphi \rangle f$ pour tout $\varphi \in k[\Lambda]^W$. Ainsi, H_χ apparaît comme l'espace des solutions des équations aux différences invariantes par le groupe fini W et associées au caractère χ.

Nous allons donner une expression combinatoire des équations aux différences définissant H_χ. On identifie $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$ avec l'élément de Λ de diagonale $(\varpi_F^{x_1}, \dots, \varpi_F^{x_n})$. On a vu que l'on pouvait associer au caractère non ramifié χ une famille $z_1, \dots, z_n$ d'éléments de $k^\times$. On pose $\lambda_i = \Sigma_i(z_1, \dots, z_n)$ et $\tilde{\lambda}_i = \Sigma_i(z_1^{-1}, \dots, z_n^{-1})$. On considère $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{Z}^n$ et on note, pour tout ensemble fini d'indices $I \subset \{1, \dots, n\}$,

$$e_I = \sum_{i \in I} e_i.$$

Avec ces notations, H_χ est l'ensemble des fonctions $f \in C^\infty(\Lambda, k)$ qui vérifie $\sum_{|I|=i} f(x + e_I) = \tilde{\lambda}_i f(x)$ pour tout $i = 1, \dots, n$ et tout $x \in \mathbb{Z}^n$.

THÉORÈME 3.2. *L'espace H_χ des solutions des équations aux différences associées à χ et invariantes par W, est de dimension $|W| = n!$ sur k.*

Ce résultat a été démontré par Kato pour $k = \mathbb{C}$ [10, Proposition 1.1], en utilisant les résultats de Steinberg sur les équations aux dérivées partielles invariantes par des groupes de reflexion [20]. Nous allons donner dans ce qui suit une preuve générale valable pour n'importe quel corps de coefficients k, qui utilisera une interprétation géométrique du problème. Enfin, les équations aux différences étant explicites d'un point de vue combinatoire, il serait interessant de trouver une preuve de ce résultat en déterminant une base de H_χ. Le calcul est aisé pour $n = 2$ et a été fait pour $n = 3$. La difficulté de ce dernier cas laisse penser que la détermination d'une base dans le cas général serait beaucoup plus longue que la preuve géométrique suivante.

Preuve du Théorème 3.2. On fixe des indéterminées $(t_1, \dots, t_n)$ et on note $t^x = t_1^{x_1} \cdots t_n^{x_n}$. Un élément f de $C^\infty(\Lambda, k)$ définit une série de Laurent en les t_i par

$$f = \sum_{x \in \Lambda} f(x) t^x.$$

On note à nouveau le $i$ème polynôme symétrique

$$\Sigma_i = \sum_{|I|=i} t^{e_I}.$$

En considérant la multiplication des séries de Laurent, on a pour tout $f \in H_\chi$,

$$\begin{aligned}\Sigma_i \cdot f &= \Big(\sum_{|I|=i} t^{e_I}\Big)\Big(\sum_{x\in\Lambda} f(x)t^x\Big)\\ &= \sum_{|I|=i}\sum_{x\in\Lambda} f(x)t^{x+e_I}\\ &= \sum_{|I|=i}\sum_{x\in\Lambda} f(x-e_I)t^x\\ &= \sum_{|I|=n-i}\sum_{x\in\Lambda} f(x-e_{\{1,\ldots,n\}}+e_I)t^x.\end{aligned}$$

Comme on a

$$f(x-e_{\{1,\ldots,n\}}+e_I) = \tilde\lambda_{n-i} f(x-e_{\{1,\ldots,n\}}) = \frac{\tilde\lambda_{n-i}}{\tilde\lambda_n} f(x)$$

et aussi $\tilde\lambda_{n-i}/\tilde\lambda_n = \lambda_i$, on en déduit que H_χ est l'espace des fonctions $f \in C^\infty(\Lambda, k)$ vérifiant $\Sigma_i \cdot f = \lambda_i f$ pour tout $i = 1, \ldots, n$.

Par dualité inverse, on obtient que H_χ a la même dimension que $k[\Lambda]/(\Sigma_1 - \lambda_1, \ldots, \Sigma_n - \lambda_n, \Sigma_n^{-1} - \lambda_n^{-1})$, si ce dernier espace est de dimension finie. On pose $A = k[\Lambda]$. Comme les Σ_i engendrent $B = k[\Lambda]^W$, alors on a $k[\Lambda]/(\Sigma_1 - \lambda_1, \ldots, \Sigma_n - \lambda_n, \Sigma_n^{-1} - \lambda_n^{-1}) \cong A \otimes_B B/(\Sigma_1 - \lambda_1, \ldots, \Sigma_n - \lambda_n, \Sigma_n^{-1} - \lambda_n^{-1})$. On obtient le résultat en appliquant la Proposition 3.1(ii). ∎

3.2. *Calcul de la Dimension de M_λ^B*

Nous supposons maintenant et dans toute la suite de cet article, que l est une caractéristique banale pour B.

Soient $\lambda \in X(\mathscr{H}(G, K))$ et $\chi \in X_{\mathrm{nr}}(T, k)$, deux caractères associés que l'on fixe dans ce paragraphe. Nous allons démontrer la première partie du Théorème 2.1, concernant la dimension sur k de M_λ^B.

PROPOSITION 3.3. *L'espace M_λ^B est de dimension finie sur k, égale à $|W| = n!$.*

Preuve. On remarque que la caractéristique de k étant banale pour B, le foncteur des B-invariants est exact (Proposition 1.15). On a donc un isomorphisme d'espaces vectoriels:

$$M_\lambda^B \cong k[B\backslash G/K] \otimes_{\mathscr{H}(G,K)} k_\lambda.$$

Comme la transformation de Satake $\mathscr{S}$ (Proposition 1.10) est un isomorphisme entre les $\mathscr{H}(G,K)$-modules à droite $k[B\setminus G/K]$ et $k[\Lambda]$, on a un isomorphisme d'espaces vectoriels:

$$k[B\setminus G/K]\otimes_{\mathscr{H}(G,K)}k_\lambda \to k[\Lambda]\otimes_{S(\mathscr{H}(G,K))}k_{\lambda\circ S^{-1}},$$
$$f\otimes x\mapsto S(f)\otimes x.$$

Or $S(\mathscr{H}(G,K))=k[\Lambda]^W$. En utilisant les notations de la Proposition 3.1, on a donc une identification

$$k[\Lambda]\otimes_{S(\mathscr{H}(G,K))}k_{\lambda\circ S^{-1}}=A\otimes_{B,J}k.$$

La Proposition 3.1(ii) nous donne alors le résultat. ∎

Remarque. Un calcul de dualité identique à celui de la Proposition 1.18 nous donne immédiatement un isomorphisme entre le dual lisse de M_λ^B et l'espace H_χ défini dans la partie précédente.

3.3. *Preuve de Théorème* 2.1

Soit A l'anneau des vecteurs de Witt de k (cf. [16, Chap. II, Sect. 5]. On note ϖ_l une uniformisante de A, L le corps des fractions de A.

Nous allons commencer par rappeler le principe de Brauer pour une algèbre opérant sur des espaces de dimension finie. C'est un cas particulier bien connu du principe de Brauer donné par Vignéras [21, I.9].

On considère un L-espace vectoriel de dimension finie V, sur lequel opère l'algèbre de Hecke $\mathscr{H}_A(G,B)$, que nous noterons plus simplement $\mathscr{H}_A$ dans ce paragraphe. On pose alors $\mathscr{H}_R=\mathscr{H}_A\otimes_A R$ pour toute A-algèbre R. On rappelle qu'un A-réseau de V est un A-module libre qui contient une base de V ou de façon équivalente un sous-A-module de V, de type fini, qui contient une base de V.

LEMME 3.4 (Principe de Brauer). *Soit V_0 un réseau de V stable par $\mathscr{H}_A$. Alors $V_0/\varpi_l V_0$ est un $\mathscr{H}_k$-module de longueur finie et sa suite de Jordan–Hölder est indépendante du choix de V_0.*

Nous allons maintenant relever nos caractères en caractéristique nulle. Comme $l\neq 2$, il existe une racine carrée de q dans A, que l'on choisit. On a vu alors qu'il existe un diagramme commutatif de fonctions (Proposition 1.9),

$$\begin{array}{ccc} X_{\mathrm{nr}}(T,A) & \to & X(\mathscr{H}_A(G,K)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_{\mathrm{nr}}(T,k) & \to & X(\mathscr{H}_k(G,K)), \end{array}$$

où les flèches verticales correspondent aux morphismes surjectifs de réduction modulo ϖ_l et les flèches horizontales correspondent à l'application $\chi \mapsto \lambda_\chi$ (Proposition 1.8).

Fixons maintenant deux caractères associés $\lambda \in X(\mathscr{H}_k(G,K))$ et $\chi \in X_{\mathrm{nr}}(T,k)$. Nous allons démontrer que $M^B_{\lambda,k}$ et $\mathscr{I}^B_{\chi,k}$ ont même suite de Jordan−Hölder en tant que $\mathscr{H}_k$-modules.

En utilisant les notations précédentes et le critère d'irréductibilité des séries principales en caractéristique nulle [3, Sect. 4.2], on peut choisir un relèvement $\tilde{\chi} \in X_{\mathrm{nr}}(T,A)$ de χ tel que la série principale $\mathscr{I}_{\tilde{\chi},L}$ soit irréductible. Alors le diagramme de réduction précédent étant commutatif, le caractère $\lambda_{\tilde{\chi}}$ associé à $\tilde{\chi}$, que nous noterons plus simplement $\tilde{\lambda}$, est un relèvement du caractère λ.

Nous allons maintenant construire deux réseaux de $\mathscr{I}^B_{\tilde{\chi},L}$, stables par $\mathscr{H}_A$, dont les réductions respectives seront $M^B_{\lambda,k}$ et $\mathscr{I}^B_{\chi,k}$.

Lemme 3.5. *$\mathscr{I}^B_{\tilde{\chi},A}$ est un réseau de $\mathscr{I}^B_{\tilde{\chi},L}$ stable par $\mathscr{H}_A$; on a un isomorphisme de $\mathscr{H}_k$-modules*:

$$\mathscr{I}^B_{\tilde{\chi},A}/\varpi_l\mathscr{I}^B_{\tilde{\chi},A} \cong \mathscr{I}^B_{\chi,k}.$$

Preuve. $\mathscr{I}^B_{\tilde{\chi},A}$ est visiblement stable par $\mathscr{H}_A$; on sait aussi qu'il existe une base de $\mathscr{I}^B_{\tilde{\chi},L}$ formée par des éléments de $\mathscr{I}^B_{\tilde{\chi},A}$ [9, Proposition 2.1].

Enfin, on a un morphisme naturel de réduction de $\mathscr{I}_{\tilde{\chi},A} \to \mathscr{I}_{\tilde{\chi},k}$. Il définit une suite exacte de $A[G]$-morphismes

$$0 \to \varpi_l\mathscr{I}_{\tilde{\chi},A} \to \mathscr{I}_{\tilde{\chi},A} \to \mathscr{I}_{\chi,k} \to 0.$$

Le Lemme 1.13 nous donne une suite exacte de $\mathscr{H}_A$-modules

$$0 \to \varpi_l\mathscr{I}^B_{\tilde{\chi},A} \to \mathscr{I}^B_{\tilde{\chi},A} \to \mathscr{I}^B_{\chi,k} \to 0.$$

∎

Lemme 3.6. *Soit $\mathscr{X}$ le $A[G]$-module engendré par le vecteur sphérique $1_{\tilde{\chi}} \in \mathscr{I}^B_{\tilde{\chi},L}$. Si on note $\mathscr{Y} = \mathscr{X}^B$, alors $\mathscr{Y}$ est un réseau de $\mathscr{I}^B_{\tilde{\chi},L}$ stable par $\mathscr{H}_A$ et on a un isomorphisme de $\mathscr{H}_k$-modules*:

$$\mathscr{Y}/\varpi_l\mathscr{Y} \cong M^B_{\lambda,k}.$$

Preuve. Le Corollaire 1.14 nous dit que $\mathscr{Y}$ est un $\mathscr{H}_A$-module cyclique engendré par $1_{\tilde{\chi}}$. Comme le vecteur sphérique est dans $\mathscr{I}^B_{\tilde{\chi},A}$, $\mathscr{Y}$ est un sous $\mathscr{H}_A$-module de $\mathscr{I}^B_{\tilde{\chi},A}$. Il est donc en particulier libre de rang fini sur A. De plus, $\mathscr{I}_{\tilde{\chi},L}$ étant irréductible et L étant de caractéristique nulle, $\mathscr{I}^B_{\tilde{\chi},L}$ est un $\mathscr{H}_L$-module simple. Donc $\mathscr{Y} \otimes_A L = \mathscr{I}^B_{\tilde{\chi},L}$, ce qui prouve que $\mathscr{Y}$ est un réseau de $\mathscr{I}^B_{\tilde{\chi},L}$.

On a grâce au Lemme 1.13, un isomorphisme de $\mathscr{H}_k$-modules

$$(\mathscr{X}/\varpi_l\mathscr{X})^B \cong \mathscr{Y}/\varpi_l\mathscr{Y}.$$

Comme l'algèbre $\mathscr{H}_k(G, K)$ opère par le caractère λ sur l'image i de $1_{\tilde{\chi}}$ dans le $k[G]$-module cyclique $\mathscr{X}/\varpi_l\mathscr{X}$, la propriété universelle 1.19 nous donne un morphisme de $k[G]$-modules,

$$\phi_\lambda\colon M_{\lambda, k} \to \mathscr{X}/\varpi_l\mathscr{X};$$

il est surjectif car $\mathscr{X}/\varpi_l\mathscr{X}$ est engendré par i.

Le Lemme 1.13 nous donne alors un morphisme surjectif de $\mathscr{H}_k$-modules:

$$\phi_\lambda^B\colon M_{\lambda, k}^B \to \mathscr{Y}/\varpi_l\mathscr{Y}.$$

Or on a démontré que la dimension sur k de $M_{\lambda, k}^B$ vaut $|W|$ (Proposition 3.3), et on a facilement les égalités

$$\dim_k \mathscr{Y}/\varpi_l\mathscr{Y} = \operatorname{rang}_A \mathscr{Y} = \dim_L \mathscr{I}_{\tilde{\chi}, L}^B = |W|.$$

Ce qui prouve que ϕ_λ est un isomorphisme. ∎

Nous pouvons appliquer le Lemme 3.4 aux réseaux définis dans les Lemmes 3.5 et 3.6, et obtenir ainsi l'égalité des suites de Jordan–Hölder des $\mathscr{H}_k$-modules $M_{\lambda, k}^B$ et $\mathscr{I}_{\chi, k}^B$, ce qui prouve le Théorème 2.1.

4. PREUVE DU THÉORÈME 2.3

Le Théorème 2.3 est un corollaire évident du Théorème 2.1 si l est une caractéristique banale pour G: le morphisme canonique $M_\lambda \to \mathscr{I}_\chi$ a toujours pour image le G-module engendré par 1_χ, et le Corollaire 2.2 nous donne le résultat. Mais on ne peut pas conclure à partir simplement du Théorème 2.1 pour les caractéristiques banales pour B qui ne le sont pas pour G. En effet, dans le cas particulier de GL(2), $q \equiv -1 \bmod l$ et $l \neq 2$, Serre a démontré que les induites et les modules universels associés au caractère trivial de $\mathscr{H}(G, K)$ ont même suite de Jordan–Hölder [17] et Vignéras a prouvé que ces G-modules sont de longueur 3 [22, Théorème 3]. Comme W est d'ordre 2, les espaces de leurs B-invariants sont au plus de longueur 2, ce qui prouve que connaître l'égalité des suites de composition de M_λ^B et $\mathscr{I}_\chi^B$ ne suffit pas pour démontrer le Théorème 2.3.

4.1. *Un Résultat de Schneider et Stuhler*

Soit R un anneau. On considère un caractère non ramifié $\chi \in X_{\mathrm{nr}}(T, R)$ que l'on suppose fixé dans ce paragraphe. Nous allons rappeler un résultat essentiellement dû à Schneider et Stuhler [15, Sect. 4, Proposition 11]. En fait, le résultat et la preuve de Schneider et Stuhler sont donnés dans le cas du caractère trivial de $X_{\mathrm{nr}}(T, \mathbb{Z})$. Le fait qu'ils s'étendent naturellement à tous les caractères non ramifiés à valeurs dans un anneau quelconque, a été vérifié par Barbaza (travail rédigé sous la direction de M. F. Vignéras (non publié) nous remercions que de nous avoir fait part de ce résultat); la démonstration est analogue à celle de [15].

On note e_χ la fonction de $\mathscr{I}^{B}_{\chi, R}$ de support PB, définie par $e_\chi(tnb) = \chi(t)$ pour tout $t \in T$, $n \in N$, et $b \in B$. On considère alors le morphisme de G-modules H: $R[G/B] \to \mathscr{I}_{\chi, R}$, défini par $H(1_B) = e_\chi$. On a alors, comme en [15, Sect. 4, Corollaire 9]:

LEMME 4.1. *La série principale $\mathscr{I}_{\chi, R}$ est engendrée par e_χ en tant que G-module; de façon équivalente, H est un morphisme surjectif de G-modules.*

On note $T^{++} \subset T$ le monoïde constitué par les matrices de T de diagonale $(t_1, \ldots, t_n)$ telle que $1 \geq |t_1|_F \geq \cdots \geq |t_n|_F$. Pour tout $i = 0, \ldots, n-1$, on note y_i la matrice de T^{++} dont les i premiers éléments diagonaux valent 1 et dont les $n-i$ suivants valent ϖ_F. On considère alors la sous-algèbre $\mathscr{A}$ de $\mathscr{H}_{\mathbb{Z}}(G, B)$, engendrée par les fonctions caractéristiques 1_{ByB} avec $y \in T^{++}$. Elle opère naturellement à droite sur $\mathbb{Z}[G/B]$.

LEMME 4.2 [15, Sect. 4, Lemme 10]. *$\mathscr{A}$ est une algèbre de polynômes sur $\mathbb{Z}$ en les variables 1_{By_iB} pour $i = 0, \ldots, n-1$.*

Soit $\mathscr{A}_R = \mathscr{A} \otimes_{\mathbb{Z}} R$. On considère le morphisme d'algèbres α: $\mathscr{A}_R \to R$ associé à χ: il est défini par $\alpha(1_{By_iB}) = \delta^{-1/2}(y_i)\chi(y_i)$. On note à nouveau R_α le R-module de rang 1 sur lequel $\mathscr{A}_R$ opère par α. On a alors, comme en [15, Sect. 4, Proposition 11]:

PROPOSITION 4.3. *L'algèbre $\mathscr{A}_R$ opère par α sur e_χ et H induit un isomorphisme de G-modules*

$$R[G/B] \otimes_{\mathscr{A}_R} R_\alpha \cong \mathscr{I}_{\chi, R}.$$

4.2. *Preuve du Théorème* 2.3

Soient $\lambda \in X(\mathscr{H}_k(G, K))$ et $\chi \in X_{\mathrm{nr}}(T, k)$, deux caractères associés. On suppose que le vecteur sphérique 1_χ est cyclique dans la série principale $\mathscr{I}_\chi$. Le morphisme ϕ_χ: $M_\lambda \to \mathscr{I}_\chi$ défini par la Proposition 1.20 est alors surjectif. Comme la caractéristique de k est banale pour B, le foncteur des B-invariants est exact (Proposition 1.15). On en déduit que ϕ_χ est aussi un $\mathscr{H}_k(G, B)$-morphisme surjectif de M_λ^B sur $\mathscr{I}_\chi^B$. Comme ces deux espaces ont la même dimension sur k (Proposition 3.3), on obtient:

LEMME 4.4. *Si 1_χ est cyclique dans $\mathscr{I}_\chi$, alors l'application ϕ_χ: $M_\lambda^B \to \mathscr{I}_\chi^B$ est un isomorphisme de $\mathscr{H}_k(G, B)$-modules.*

Notons $e'_\chi \in M_\lambda^B$ l'image réciproque de $e_\chi \in \mathscr{I}_\chi^B$ par ϕ_χ. On définit un G-morphisme Φ: $k[G/B] \to M_\lambda$ par

$$\Phi(1_{gB}) = g \cdot e'_\chi .$$

On a un diagramme commutatif de G-morphismes:

$$\begin{tikzcd} k[G/B] \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "H"'] & M_\lambda \arrow[dl, "\phi_\chi"] \\ \mathscr{I}_\chi & \end{tikzcd}$$

En effet, on a d'une part $H(1_B) = e_\chi$ et d'autre part $\phi_\chi \circ \Phi(1_B) = \phi_\chi(e'_\chi) = e_\chi$. Comme 1_B engendre $k[G/B]$ en tant que G-module, alors on a bien $H = \phi_\chi \circ \Phi$.

Soient $\mathscr{A}_k = \mathscr{A} \otimes_{\mathbb{Z}} k$ la sous-algèbre de $\mathscr{H}_k(G, B)$ définie dans le paragraphe précédent et α: $\mathscr{A}_k \to k$ le caractère associé à χ, défini aussi précédemment. Nous savons que H se factorise en un isomorphisme, noté à nouveau H (Proposition 4.3):

$$k[G/B] \otimes_{\mathscr{A}_k} k_\alpha \cong \mathscr{I}_{\chi, k} .$$

LEMME 4.5. *Le G-morphisme Φ est surjectif et il se factorise en un G-morphisme surjectif*:

$$k[G/B] \otimes_{\mathscr{A}_k} k_\alpha \to M_\lambda .$$

Preuve. On sait que e_χ est cyclique dans le G-module $\mathscr{I}_\chi$ (Proposition 4.1). Le Corollaire 1.14 nous dit que e_χ engendre $\mathscr{I}_\chi^B$ en tant que $\mathscr{H}_k(G, B)$-module et donc, grâce au Lemme 4.4, e'_χ engendre le $\mathscr{H}_k(G, B)$-module M_λ^B. Comme $\overline{1}_K \in M_\lambda^B$, alors $\overline{1}_K$ est dans l'image de Φ. Enfin, puisque $\overline{1}_K$ engendre le G-module M_λ, Φ est surjectif.

Pour montrer que Φ se factorise convenablement, il suffit de vérifier que, pour tout $a \in \mathscr{A}_k \subset \mathscr{H}_k(G, B)$, on a

$$(a - \alpha(a)) \cdot e'_\chi = 0.$$

Mais ce vecteur est dans M_λ^B, l'égalité se déduit alors, en utilisant le diagramme commutatif précédent, du fait que $\mathscr{A}_k$ opère par α sur e_χ (Proposition 4.3). ▮

On considère le diagramme commutatif de G-morphismes provenant de la factorisation du premier diagramme:

$$\begin{tikzcd} k[G/B] \otimes_{\mathscr{A}_k} k_\alpha \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "H"'] & M_\lambda . \arrow[dl, "\phi_\chi"] \\ \mathscr{I}_\chi & \end{tikzcd}$$

On a vu que H ainsi factorisé est un isomorphisme. On en déduit alors que Φ est injectif et que c'est aussi un isomorphisme d'après le Lemme 4.5. Finalement, ϕ_χ est un isomorphisme de M_λ sur $\mathscr{I}_\chi$, ce qui achève la démonstration du Théorème 2.3.

5. RETOUR SUR LE CAS COMPLEXE

Les résultats précédemment démontrés sont valables si on remplace k par $\mathbb{C}$. (Kato a énoncé et prouvé une partie de ces résultats dans [10].) En effet, on peut adapter les preuves reposant sur un relèvement de la situation en caractéristique nulle, en remplaçant l'anneau des vecteurs de Witt par l'anneau $\mathbb{C}[[X]]$ des séries formelles sur $\mathbb{C}$ à une indéterminée. Tous les arguments précédemment exposés restent alors valables.

Nous pouvons complèter ces résultats par la proposition suivante qui précise le Corollaire 2.2.

PROPOSITION 5.1. *Soient $\chi \in X_{\mathrm{nr}}(T, \mathbb{C})$ et $\lambda \in X(\mathscr{H}_{\mathbb{C}}(G, K))$, deux caractères associés. Il existe $w \in W$ tel que l'application canonique $\phi_{w\cdot\chi}$: $M_\lambda \to \mathscr{I}_{w\cdot\chi}$ soit un isomorphisme de G-modules.*

Preuve. Soient $\chi \in X_{\mathrm{nr}}(T, \mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathscr{H}_{\mathbb{C}}(G, K)$, deux caractères associés. Choisissons χ (modulo W) tel que $\mathrm{Re}(z_1) \geq \mathrm{Re}(z_2) \geq \cdots \geq \mathrm{Re}(z_n)$. Alors la représentation $\mathscr{I}_\chi$ a un unique quotient irréductible; ceci résulte du théorème du quotient de Langlands [5, Sect. IX.2, Silberger] et du fait que les séries principales unitaires sont irréductibles pour $\mathrm{GL}(n)$ (Jacquet, [23], ou [2]). Celui-ci est sphérique [12, Proposition 6]. On en déduit aisément que $\mathscr{I}_\chi$ est engendré par 1_χ et le Théorème 2.3 permet de conclure. ▮

On remarque que cette proposition n'est pas vraie en général quand la caractéristique l du corps de coefficients est non nulle. En effet, dans le cas particulier de GL(2), $q \equiv 1 \bmod l$ et $l \neq 2$, Serre a démontré dans son cours au Collège de France [17], que pour un bon choix du caractère de $\mathscr{H}(G, K)$, l'image du module universel dans une induite associée est réduite à k, ce qui prouve que le morphisme canonique ne peut être bijectif.

RÉFÉRENCES

1. L. Barthel et R. Livné, Modular representations of GL_2 of a local field: The ordinary, unramified case, *J. Number Theory* **55** (1995), 1–27.
2. J. Bernstein, P-invariant distributions on GL(N) and the classification of unitary representations of GL(N) (non archimedean case), *in* "Lie Group Representations II," Lecture Notes in Math., Vol. 1041, pp. 50–103, Springer-Verlag, Berlin, 1984.
3. J. Bernstein et A. Zelevinsky, Induced representations of reductive p-adic groups I, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (*4*) **10** (1977), 441–472.
4. A. Borel, Admissible representations of a semi-simple group over a local field with vectors fixed under an Iwahori subgroup, *Invent. Math.* **35** (1976), 233–259.
5. A. Borel et N. Wallach, Continuous cohomology, discrete subgroups, and representations of reductive groups, *Ann. of Math. Stud.* **94** (1980), 1–382.
6. N. Bourbaki, "Algèbre Commutative," Chaps. 5 à 7, Masson, Paris, 1985.
7. N. Bourbaki, "Groupes et Algèbres de Lie," Chaps. 4 à 6, Actualités Scientifiques et Industrielles, Vol. 1337, Hermann, Paris, 1968.
8. F. Bruhat et J. Tits, Groupes réductifs sur un corps local, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **41** (1972), 5–252.
9. W. Casselman, The unramified principal series of p-adic reductive groups, I, The spherical functions, *Compositio Math.* **40**, (1980), 387–406.
10. S.-I. Kato, On eigenspaces of the Hecke algebra with respect to a good maximal compact subgroup of a p-adic reductive group, *Math. Ann.* **257** (1981), 1–7.
11. S.-I. Kato, Irreducibility of principal series representations for Hecke algebras of affine type, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo* **28** (1982), 929–944.
12. J. P. Labesse, Fonctions élémentaires et lemme fondamental pour le changement de base stable, *Duke Math. J.* **61** (1990), 519–530.
13. I. G. MacDonald, Spherical functions on a group of p-adic type, *Publ. Ramanujan Inst.* **2** (1971).
14. I. Satake, Theory of spherical functions on reductive algebraic groups over $\mathfrak{P}$-adic fields, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **18** (1963), 1–69.
15. P. Schneider et U. Stuhler, The cohomology of p-adic symmetric spaces, *Invent. Math.* **105** (1994), 47–122.
16. J. P. Serre, "Corps Locaux," Actualités Scientifiques et Industrielles, Vol. 1296, Hermann, Paris, 1968.
17. J. P. Serre, Résumé des cours au Collège de France, 1987–1988, *Annuaire du Collège de France* (1988), 79–82.
18. J. P. Serre, Two letters on quaternions and modular forms (mod p), *Israel J. Math.* **95** (1996), 281–299.

19. G. Shimura, ‘‘Introduction to the Arithmetic Theory of Automorphic Forms,’’ Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1971.
20. R. Steinberg, Differential equations invariant under finite reflection groups, *Trans. Amer. Math. Soc.* **112** (1964), 392–400.
21. M. F. Vigneras, Représentations l-modulaires d’un groupe réductif p-adique avec $l \neq p$, *Prog. Math.* **137** (1996).
22. M. F. Vigneras, Représentations de $GL(2, F)$ en caractéristique l, F corps p-adique, $p \neq l$, *Compositio Math.* **72** (1989), 33–66.
23. A. Zelevinski, Induced representations of reductive p-adic groups II, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4) **13** (1980), 165–210.
24. J. F. Dat, Types et Inductions pour les représentations modulaires des groupes p-adiques, à praître dans *Ann. Sci. École Norm. Sup.*